Devoir surveillé de Mathématiques n°5

N.B : L'élève attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un élève est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 **(algorithme de Héron)**

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 2 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{u_n^2+2}{2u_n} \end{array}\right. ,\ n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer les quatre premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par $\sqrt{2}$.

3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{2}$.

Exercice 2 **(dérivée n-ième de la fonction $x \mapsto x^2e^x$)**

On considère la fonction $f : x \mapsto x^2e^x$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f^{(n)}(x) = P_n(x)e^x$ où P_n est une fonction polynomiale de degré 2 et de coefficient dominant égal à 1.

2. On note désormais $P_n(x) = x^2 + a_nx + b_n$ avec $a_n, b_n \in \mathbb{R}$.
   (a) Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Déterminer une forme explicite pour a_n.

   (c) Déterminer une forme explicite pour b_n.

   (d) En déduire une expression de $f^{(n)}(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 (développement en série de la fonction exponentielle)

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on note $u_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{x^k}{k!}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $u_n : x \mapsto u_n(x)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et exprimer $u_n'(x)$ en fonction de $u_n(x)$.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f : x \mapsto u_n(x)e^{-x}$ admet un maximum sur $\mathbb{R}_+$.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $g : x \mapsto f(x) + \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ admet un minimum sur $\mathbb{R}_+$.

4. En déduire un encadrement de $u_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite que l'on calculera.

Exercice 4 (polynômes de Faulhaber)

On appelle *polynôme de Faulhaber* de degré $p \in \mathbb{N}^*$ un polynôme $F_p \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$F_p(X+1) - F_p(X) = X^{p-1}$$

1. (a) Déterminer un polynôme de Faulhaber de degré 2.
   (b) Déterminer un polynôme de Faulhaber de degré 3.

2. (a) Montrer que si F_p est un polynôme de Faulhaber, on a $\sum_{k=1}^{k=n} k^p = F_{p+1}(n+1) - F_{p+1}(0)$.
   (b) Calculer $\sum_{k=1}^{k=n} k$ et $\sum_{k=1}^{k=n} k^2$.

3. (a) On considère un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, et on note $Q(X) = P(X+1) - P(X)$. Déterminer le degré du polynôme $\deg(Q)$ en fonction de $\deg(P)$.
   (b) On considère un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X+1) - P(X) = 0$, montrer que P est constant et en déduire que deux polynômes de Faulhaber de degré p diffèrent d'une constante.
   (on pourra considérer le polynôme $Q(X) = P(X) - P(0)$)
   (c) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme de Faulhaber de degré p.
   (on pourra procéder par récurrence en considérant une primitive du polynôme F_p)